

文章编号: 1000-8055(2008)09-1731-06

考虑表面波纹度的滚动轴承-转子系统 非线性动力特性

张耀强^{1,2}, 陈建军¹, 邓四二², 林立广¹

(1. 西安电子科技大学 机电工程学院, 西安 710071;

2. 河南科技大学 工程力学研究所, 洛阳 471003)

摘 要: 提出了考虑滚动轴承内外圈滚道表面波纹度、Hertzian 弹性接触力和径向游隙等非线性因素的滚动轴承模型,建立了滚动轴承-转子系统的动力学微分方程,并用 Runge-Kutta-Fehlberg 算法对其求解. 利用分岔图、Poincaré 映射图和频谱图,分析了参数变化时的滚动轴承-转子系统的分岔、混沌等非线性动力特性. 结果表明:外圈波纹度波数与滚动轴承滚珠数目相等时,转子系统会产生强烈振动;转子系统进入混沌的主要途径是倍周期分岔;内圈波纹度引起的振动频率与波数有明确的函数关系.

关 键 词: 滚动轴承; 表面波纹度; 非线性动力特性; 分岔; 混沌

中图分类号: V231. 96

文献标识码: A

Nonlinear dynamic characteristics of a rolling bearing-rotor system with surface waviness

ZHANG Yao-qiang^{1,2}, CHEN Jian-jun¹, DENG Si-er², LIN Li-guang¹

(1. School of Electronic Mechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China;

2. Institute of Engineering Mechanics,

Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003, China)

Abstract: In consideration of the sources of nonlinearity such as inner and outer race surface waviness, Hertzian elastic contact force and internal radial clearance, an analytical model of rolling bearing was presented. The governing differential equations of motion of a rolling bearing-rotor system were solved by Runge-Kutta-Fehlberg algorithm. The nonlinear dynamic behavior of the system with variations of parameters was analyzed by means of bifurcation diagrams, Poincaré maps and spectrum diagrams. Simulation results show that the severe vibration occurs when the number of balls is equal to the number of waves. The main route to chaos is doubling bifurcation. There is a definitely functional relationship between the number of waves and frequencies of vibration produced by inner race waviness.

Key words: rolling bearing; surface waviness; nonlinear dynamics characteristic; bifurcation; chaos

滚动轴承广泛应用于火箭发动机、航空燃气涡轮机及其它旋转机械,其内外圈滚道表面波纹度是造成轴承及转子系统产生振动、噪声和疲劳

破坏的主要因素之一. 由于制造工艺的原因,滚动轴承中不可避免的存在波纹度. 为了确保旋转机械安全、平稳的高速运转,有必要研究考虑滚动轴

收稿日期: 2007-09-19; 修订日期: 2007-12-20

基金项目: 国家“十一五”科技攻关项目(J PPT-115-189); 国家 863 项目(2006AA04Z402)

作者简介: 张耀强(1968-), 男, 陕西岐山人, 博士生, 研究方向: 转子动力学. E-mail: zyq1968@tom.com

承内外圈波纹度的转子系统非线性动力特性. 邓四二^[1]提出了一种减小波纹度幅值的光饰处理方法. 白长青^[2]建立了考虑波纹度和滚动体离心力的转子系统有限元模型, 研究表明波纹度和离心力对转子系统的动力特性有明显的影响. Aktürk^[3]提出了一种考虑波纹度的3自由度滚动轴承振动模型. Jang^[4,5]基于一个5自由度动力学模型, 分析了波纹度对转子系统振动及稳定性的影响. Harsha^[6,7]研究了考虑波纹度的滚动轴承及轴承-转子系统的非线性动力响应. 这些研究都是基于某一固定的参数, 没有涉及转子转速、波纹度波数和幅值等参数变化时系统的分岔、混沌等非线性动力特性.

本文建立了考虑滚动轴承内外圈滚道表面波纹度、Hertzian 弹性接触力、径向游隙等非线性因素的滚动轴承-转子系统的动力学方程, 并用 Runge-Kutta-Fehlberg 算法对其求解, 利用分岔图、Poincaré 映射图和频谱图, 分析了参数变化时的滚动轴承-转子系统的分岔、混沌等非线性动力特性.

1 数学模型

在滚动轴承模型中, 假设外圈与机架是刚性支承, 内圈刚性固定在转子轴上, 滚珠等距离分布在内外圈滚道之间做纯滚动, 内外圈滚道表面波纹度为正弦波. 图1所示为滚动轴承和波纹度模型示意图.

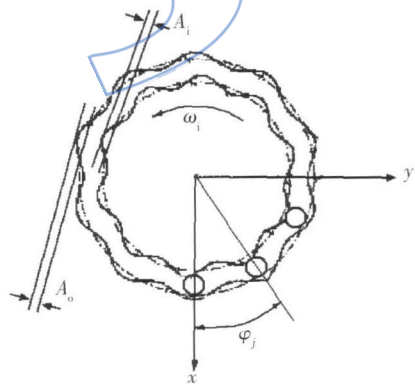


图1 滚动轴承和波纹度示意图

Fig.1 Schematic diagrams of bearing and waviness

1.1 内外圈波纹度

在某时刻 t , 第 j 个滚珠与内圈滚道接触点的表面波纹度 p_{ij} 可表示为

$$p_{ij} = A_i \sin \left[2\pi \frac{L}{\lambda} + \theta \right] \quad j = 1, 2, \dots, N_b \quad (1)$$

式中 A_i 为最大幅值, L 为该接触点距参考点的弧

长, λ 为波长, θ 是初始相位角, N_b 是滚珠数目, 且有

$$\lambda = \frac{2\pi R_i}{N_w} \quad (2)$$

$$L = R_i \phi \quad (3)$$

式中 R_i 是内圈滚道半径, N_w 为波数, ϕ 是 t 时刻接触点的角位置

$$\phi = \frac{2\pi}{N_b} (j - 1) + (\omega - \omega_t) t \quad (4)$$

其中 ω 是内圈角速度, ω_t 是滚珠公转的角速度, 其大小为^[8]

$$\omega_t = \omega \frac{R_i}{R_i + R_o} \quad (5)$$

式中 R_o 是外圈滚道半径. 将式(2), (3)和(4)代入(1)可得

$$p_{ij} = A_i \sin \left\{ N_w \left[\frac{2\pi}{N_b} (j - 1) + (\omega - \omega_t) t \right] + \theta \right\} \quad j = 1, 2, \dots, N_b \quad (6)$$

同理, 可得 t 时刻第 j 个滚珠与外圈滚道接触点的表面波纹度 p_{oj}

$$p_{oj} = A_o \sin \left\{ N_w \left[\frac{2\pi}{N_b} (j - 1) + \omega_t t \right] + \theta \right\} \quad j = 1, 2, \dots, N_b \quad (7)$$

式中 A_o 为外圈波纹度最大幅值, θ 是初始相位角.

1.2 非线性轴承力

根据赫兹 (Hertz) 弹性接触理论, 第 j 个滚珠与内外圈滚道间的局部接触弹性恢复力 F_j 与接触弹性变形的关系为

$$F_j = k_b u_j^{3/2} \quad (8)$$

式中 u_j 表示弹性变形量, k_b 表示总接触刚度, 大小为

$$k_b = \left[\frac{1}{(1/k_i)^{2/3} + (1/k_o)^{2/3}} \right]^{3/2} \quad (9)$$

其中 k_i 和 k_o 分别表示滚珠与内、外圈滚道间的接触刚度. 若两接触体材料特性相同, 则有

$$k_i = k_o = \frac{2\sqrt{2}E}{3(1-\mu^2)} \times \left(\sum \rho \right)^{-1/2} (\delta^*)^{-3/2} \quad (10)$$

其中 E 是弹性模量, μ 是泊松比, $\sum \rho$ 是接触点的曲率和, δ^* 是变形系数, 其值可查文献[9].

图1所示坐标系中, 第 j 个滚珠的弹性变形量 u_j 可表示为:

$$u_j = [(x \cos \phi_j + y \sin \phi_j) \cos \alpha - \lambda_b + p_{ij} - p_{oj}]_+ \quad j = 1, 2, \dots, N_b \quad (11)$$

其中 x, y, α 和 λ_0 分别表示轴承内圈中心点在垂直方向和水平方向的位移、滚动轴承接触角和径向游隙,下标“+”表示如果计算得到的 $u_j \leq 0$,则第 j 个滚珠没有产生接触变形。

由于赫兹弹性接触,滚珠-滚道间产生了一个非线性恢复力.将式(11)代入式(8),得到第 j 个滚珠的非线性恢复力 F_j 为

$$F_j = k_b \cdot [(x \cos \phi_j + y \sin \phi_j) \cos \alpha - \lambda_0 + p_{ij} - p_{oj}]_+^{3/2} \quad j = 1, 2, \dots, N_b \quad (12)$$

式中下标“+”表示只计入括号内为正的数值,如果括号内的表达式为负或 0,则 $F_j = 0$.

滚动轴承的非线性轴承力 F 为所有滚珠恢复力之和.由式(12)可得

$$F = k_b \sum_{j=1}^{N_b} [(x \cos \phi_j + y \sin \phi_j) \cos \alpha - \lambda_0 + p_{ij} - p_{oj}]_+^{3/2} \quad (13)$$

1.3 滚动轴承-转子系统动力学方程

本文研究的滚动轴承-转子系统如图 2 所示.为了重点考察表面波纹度对滚动轴承-转子系统非线性动力特性的影响,对系统做以下简化和假设:转子是刚性平衡转子,由两个参数相同、对称分布的滚动轴承支撑;两轴承具有相同的波纹度波形且没有相位差;滚珠是理想圆球;根据 Lagrange 方程,该系统的动力学方程可表示为

$$\begin{cases} mx'' + c\dot{x} + \sum_{j=1}^{N_b} k_b [(x \cos \phi_j + y \sin \phi_j) \cdot \\ \cos \alpha - \lambda_0 + p_{ij} - p_{oj}]_+^{3/2} \cos \phi_j = F_r \\ my'' + c\dot{y} + \sum_{j=1}^{N_b} k_b [(x \cos \phi_j + y \sin \phi_j) \cdot \\ \cos \alpha - \lambda_0 + p_{ij} - p_{oj}]_+^{3/2} \sin \phi_j = 0 \end{cases} \quad (14)$$

其中 m 为转子系统质量, c 为由于摩擦和油膜造成的等效粘滞阻尼, F_r 为作用在转子上的恒定垂直力。

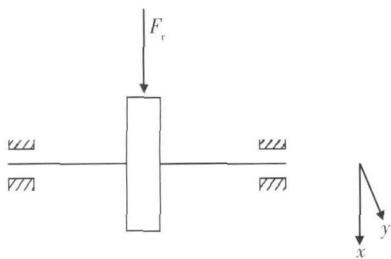
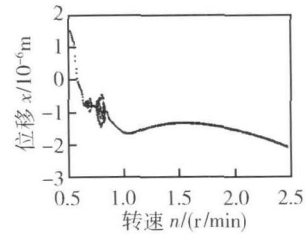
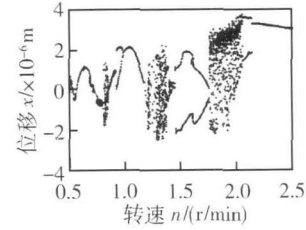


图 2 滚动轴承-转子系统

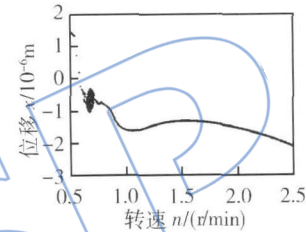
Fig.2 Rolling bearing-rotor system



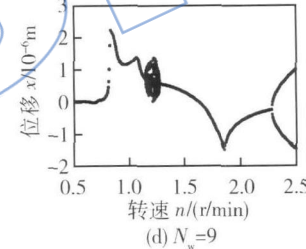
(a) $N_b=6$



(b) $N_b=7$



(c) $N_b=8$



(d) $N_b=9$

图 3 位移 x 随转速变化的分岔图

Fig.3 x -displacement bifurcation diagrams varying with rotation speed

2 计算结果及分析

以某陀螺仪轴连轴承单元为例进行分析.该转子系统的参数为: $m = 0.1189 \text{ kg}$, $c = 100 \text{ Ns/m}$, $F_r = 1.25 \text{ N}$. 滚动轴承参数为: $N_b = 7$, $R_o = 5.691 \text{ mm}$, $R_i = 3.295 \text{ mm}$, $y_0 = 1 \mu\text{m}$, $A_o = A_i = 3 \mu\text{m}$, $\alpha = 0^\circ$, 滚珠直径: 2.381 mm .

由于方程(14)的强非线性,本文采用 Runge-Kutta-Fehlberg 法求解,初始积分步长取一个激励周期的 $1/200$. 计算结果以分岔图、Poincaré 映射图和频谱图等形式给出。

2.1 外圈波纹度的影响

2.1.1 波数

波数是影响滚动轴承-转子系统动力特性的

重要因素之一. 图 3 给出了波数 N_w 分别为 6, 7, 8 和 9 时在转子转速 $n = 5\,000 \sim 25\,000\text{ r/min}$ 的范围内 x 方向的位移随转速变化的分岔图.

当 $N_w = 6$ 时, 系统主要是周期响应, 在 $n = 6\,800\text{ r/min}$ 和 $n = 8\,360\text{ r/min}$ 左右的小范围转速区域, 系统是拟周期响应. $n = 8\,360\text{ r/min}$ 时的 Poincaré 映射图如图 4 所示, 在 Poincaré 映射图上映射点形成了一条封闭的曲线, 表明系统运动进入拟周期运动状态.

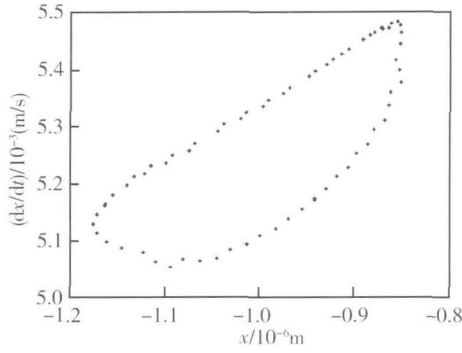


图 4 $n = 8\,360\text{ r/min}$ 时的 Poincaré 映射图
Fig. 4 Poincaré map at 8360 r/min

当 $N_w = 7$ 时, 波数与滚动轴承的滚珠数目相等, 滚动轴承-转子系统表现出丰富的非线性特性, 如图 3(b) 所示, 其运动非常复杂, 有多种周期和拟周期、混沌等响应形式. 在 $n = 5\,000 \sim 6\,932\text{ r/min}$, $n = 6\,934 \sim 7\,920\text{ r/min}$, $n = 8\,400 \sim 9\,160\text{ r/min}$, $n = 9\,800 \sim 11\,680\text{ r/min}$ 和 $n = 21\,440 \sim 25\,000\text{ r/min}$ 范围, 系统呈 1 周期运动. 在 $n = 9\,160 \sim 9\,800\text{ r/min}$, $n = 14\,480 \sim 17\,520\text{ r/min}$ 和 $n = 20\,680 \sim 21\,440\text{ r/min}$ 范围, 系统呈 2 周期运动. 图 5 是 $n = 15\,000\text{ r/min}$ 时的 Poincaré 映射图, 图中有两个 Poincaré 映射点, 表明系统是 2 周期运动. 在 $n = 6\,933\text{ r/min}$ 左右的极小的转速范围区域, 系统处于拟周期状态. 图 6 是 $n = 6\,933\text{ r/min}$ 时的 Poincaré 映射图. 在 $n = 7\,920 \sim 8\,400\text{ r/min}$, $n = 11\,680 \sim 14\,480\text{ r/min}$ 和 $n = 17\,520 \sim 20\,680\text{ r/min}$ 转速范围, 转子系统存在三个混沌响应区域. 图 7 是 $n = 19\,800\text{ r/min}$ 时的 Poincaré 映射图, 图中细致结构的混沌吸引子表明系统进入了混沌. 在 $n = 9\,800\text{ r/min}$ 和 $n = 21\,440\text{ r/min}$ 处, 系统发生了倍周期分岔. 随着转速的改变, 系统由 1 周期经历倍周期分岔而进入混沌.

当 $N_w = 8$ 时, 转子系统的响应比较简单, 如图 3(c) 所示. 在 $n = 6\,600 \sim 7\,120\text{ r/min}$ 的转速范围, 系统处于拟周期运动, 其它转速范围, 系统都

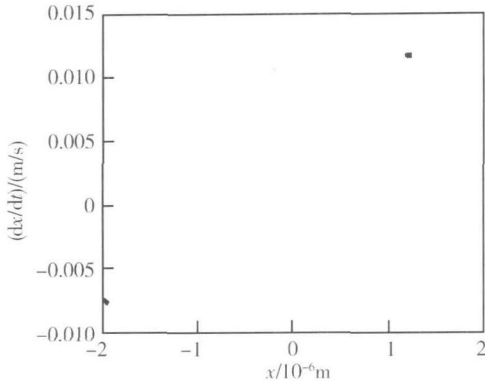


图 5 $n = 15\,000\text{ r/min}$ 时的 Poincaré 映射图
Fig. 5 Poincaré map at 15000 r/min

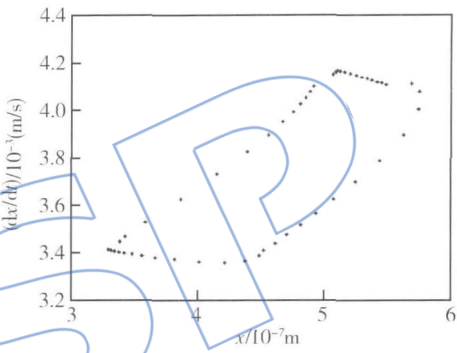


图 6 $n = 6\,933\text{ r/min}$ 时的 Poincaré 映射图
Fig. 6 Poincaré map at 6933 r/min

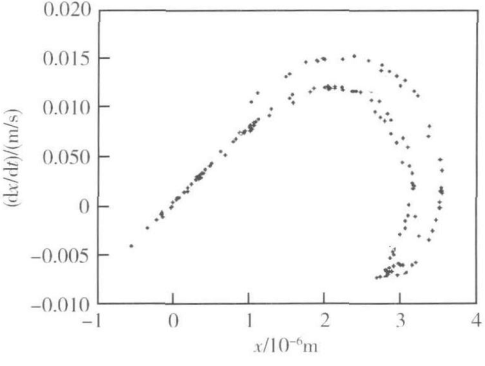


图 7 $n = 19\,800\text{ r/min}$ 时的 Poincaré 映射图
Fig. 7 Poincaré map at 19800 r/min

是 1 周期振动.

当 $N_w = 9$ 时, 转子系统的响应如图 3(d) 所示. 在 $n = 11\,300 \sim 12\,850\text{ r/min}$ 的转速范围, 系统处于拟周期运动, 在 $n = 22\,750 \sim 25\,000\text{ r/min}$ 的转速范围, 系统呈 2 周期运动. 其余转速范围, 系统都是 1 周期振动.

由以上分析可知: 当外圈波数波数与滚动轴承滚珠数目相等时, 转子系统的动力学特性极为复杂, 转子系统易进入混沌状态, 发生强烈振

动. 这与文献[10]的实验结果一致. 转子系统进入混沌的途径主要是倍周期分岔.

2.1.1.2 幅 值

图 8 是 $n = 20\,000\text{ r/min}$ 时 x 方向位移随外圈波纹度幅值 A_o 变化的分岔图. 在 $A_o = 0 \sim 7.5\text{ }\mu\text{m}$ 和 $A_o = 14.5 \sim 23\text{ }\mu\text{m}$ 范围, 系统呈混沌状态. 图 9 是 $A_o = 4\text{ }\mu\text{m}$ 的 Poincaré 图. 当 $A_o = 7.5 \sim 14.5\text{ }\mu\text{m}$ 时, 系统为 2 周期振动. 在 $A_o = 25 \sim 30\text{ }\mu\text{m}$ 范围, 系统为 1 周期振动. 在 $A_o = 25\text{ }\mu\text{m}$ 处, 随着幅值的减少, 系统由 1 周期振动变为 2 周期、4 周期, 经倍周期分岔而进入混沌.

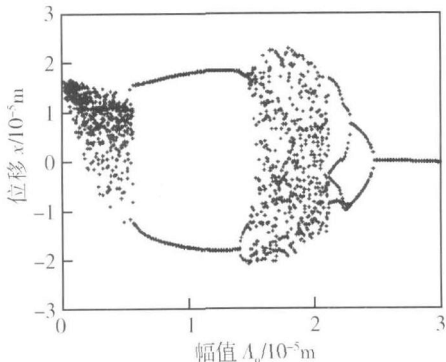


图 8 位移 x 随幅值变化的分岔图
Fig. 8 x -displacement bifurcation varying with amplitude

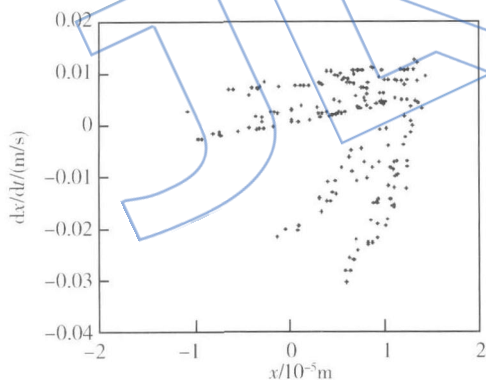


图 9 Poincaré 图
Fig. 9 Poincaré map

在该转速下, 随着波纹度幅值的增大, 非周期响应和周期响应交错出现, 最后稳定在 1 周期. 因此, 合理的控制外圈波纹度幅值, 可以降低波纹度引起的非周期振动, 提高系统运行的稳定性.

2.2 内圈波纹度的影响

滚动轴承运转时, 其滚珠每通过内圈波纹度波峰一次, 就产生一次振动, 这即为波通过振动 WPV (Wave passage vibration)^[9]. 波通过振动频率 f_{wp} 为

$$f_{wp} = \frac{(\omega - \Omega) N_b}{2\pi} \quad (15)$$

而轴承内圈与转子轴以相同的频率 f_i 旋转

$$f_i = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{n}{60} \quad (16)$$

式中 n 是转子的转速 (单位 r/min). 当 $n = 8\,000\text{ r/min}$ 时, 为研究内圈波纹度的影响而得到的转子系统在不同波数时的频谱图如图 10 所示.

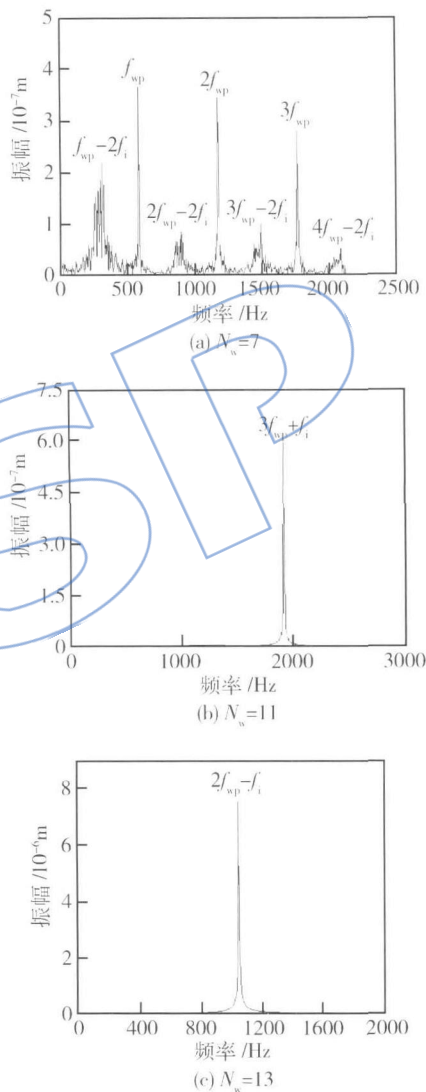


图 10 不同波数时的频谱图
Fig. 10 Spectrum diagrams with varying number of waves

当 $N_w = 7$ 时, 波数与滚珠数目相等, 系统的响应比较复杂, 有多种频率成分, 如图 10 (a) 所示. 最大振幅出现在波通过频率 f_{wp} , 系统还有频率为 $2f_{wp}$ 和 $3f_{wp}$ 的超谐波响应, 而且系统中还存在频率分别为 $f_{wp} - 2f_i$, $2f_{wp} - 2f_i$, $3f_{wp} - 2f_i$ 和 $4f_{wp} - 2f_i$ 的组合振动. 当 $N_w = 11$ 和 $N_w = 13$ 时, 系统的响应都只有一种频率, 分别为 $3f_{wp} + f_i$

和 $2f_{wp} - f_i$. 表 1 是不同波数时最大振幅对应的频率.

表 1 不同波数时最大振幅对应的频率
Table 1 Frequency at peak amplitude

波数 N_w	最大振幅处频率 f / Hz
6	$f_{wp} - f_i$
7	f_{wp}
8	$f_{wp} + f_i$
9	$f_{wp} + 2f_i$
10	$3f_{wp} - f_i$
11	$3f_{wp} + f_i$
12	$2f_{wp} - 2f_i$
13	$2f_{wp} - f_i$
14	$2f_{wp}$
15	$2f_{wp} + f_i$
16	$2f_{wp} + 2f_i$
17	$5f_{wp} - f_i$

由表 1 可得,波数 N_w ,滚珠数目 N_b 和最大振幅处的频率 f 满足以下关系式
存在非负整数 i 和 j ,使

$$N_w = iN_b \pm j \tag{17}$$

则有

$$f = \begin{cases} if_{wp} \pm jf_i & j = 0, 1 \text{ 或 } 2 \\ (2i + 1)f_{wp} + (2j - 7)f_i & j = 3 \text{ 或 } 4 \end{cases} \tag{18}$$

利用式(18)可预测更大波数时最大振幅处的频率 f .

3 结 论

建立了考虑滚动轴承内外圈滚道表面波纹度的轴承-转子系统的动力学方程,分析了波纹度对转子系统非线性动力特性的影响.研究表明:

- 1) 外圈波纹度波数与滚动轴承滚珠数目相等时,转子系统会产生强烈振动.
- 2) 转子系统进入混沌的主要途径是倍周期分岔.
- 3) 内圈波纹度引起的振动频率与波数有关,满足

波数
$$N_w = iN_b \pm j$$

最大振幅处的频率

$$f = \begin{cases} if_{wp} \pm jf_i & j = 0, 1 \text{ 或 } 2 \\ (2i + 1)f_{wp} + (2j - 7)f_i & j = 3 \text{ 或 } 4 \end{cases}$$

以上的计算结果可为该类转子的设计及滚动轴承表面质量控制提供一定的参考依据.

参考文献:

[1] 邓四二,滕弘飞,马付建,等. 航空发动机主轴轴承滚道表面光饰强化处理[J]. 航空动力学报,2006,21(3):545-549.
DENG Sier, TENG Hongfei, MA Fujian, et al. Luster polish strengthening for race surface of the main shaft bearings of aeroengine[J]. Journal of Aerospace Power, 2006, 21(3):545-549. (in Chinese)

[2] 白长青,许庆余,张小龙. 滚动轴承-火箭发动机液氢涡轮泵转子系统的动力特性分析[J]. 航空学报,2006,27(2):258-261.
BAI Changqing, XU Qingyu, ZHANG Xiaolong. Dynamic properties analysis of ball bearings-liquid hydrogen turbopump used in rocket engine[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(2):258-261. (in Chinese)

[3] Akt ük N. The effects of waviness on vibrations associated with ball bearings[J]. American Society of Mechanical Engineers Journal of Tribology, 1999,121(4):667-677.

[4] Jang G H, Jeong S W. Vibration analysis of a rotating system due to the effect of ball bearing waviness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 269(3):709-726.

[5] Jang G H, Jeong S W. Stability analysis of a rotating system due to the effect of ball bearing waviness[J]. Journal of Tribology, 2003,125(1):91-101.

[6] Harsha S P, Sandeep K, Prakash R. Nonlinear dynamic behaviors of rolling element bearings due to surface waviness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 272(3):557-580.

[7] Harsha S P, Sandeep K, Prakash R. Nonlinear dynamic response of a rotor bearings due to surface waviness[J]. Nonlinear Dynamics, 2004, 37(2):91-114.

[8] 唐云冰,高德平,罗贵火. 滚动轴承非线性轴承力及其对轴承系统振动特性的影响[J]. 航空动力学报,2006,21(2):366-373.
TANG Yunbing, GAO Deping, LUO Guihuo. Nonlinear bearing force of the rolling ball bearing and its influence on vibration of bearing system[J]. Journal of Aerospace Power, 2006, 21(2):366-373. (in Chinese)

[9] Harris T A. Rolling bearing analysis[M]. 4th ed. New York: John Wiley and Sons, 2001.

[10] Wardle F P. Vibration forces produced by waviness of the rolling surfaces of thrust loaded ball bearing, Part II: Experimental validation[J]. Proceeding of the Institute of Mechanical Engineering, 1988, 202(5):305-312.